Sistemas lineares autônomos de tempo contínuo

Olá!

Eu sou Gêdhean Alves

Uma breve discussão sobre matriz exponencial de sistemas lineares e forma canônica de Jordan

1.1 Matriz exponencial

Uma introdução para Jordan

O que define um Sistema Dinâmico?

- variável temporal t;
- espaço de fases;
- métrica usada para medir distâncias;
- *operador evolução* $\vec{\varphi}^t$, através do qual

$$\vec{x}(t) = \vec{\varphi}^t(\vec{x}(0))$$

Mas quem é o operador evolução dos sistemas lineares?

Seja um sistema de *n* eq. diferenciais autônomas, lineares e homogêneas:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

Supondo conhecer sua solução . Expandindo-a em série de Taylor em torno de $t = 0$:

$$\vec{z}(t) \;=\; \vec{z}(0) + \left.\frac{d\vec{z}(t)}{dt}\right|_{t=0} \frac{t}{1!} + \left.\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} \frac{t^2}{2!} + \ldots + \left.\frac{d^k\vec{z}(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \frac{t^k}{k!} \quad \text{para } k \to \infty$$

Mas quem é o operador evolução dos sistemas lineares?

As derivadas dessa solução podem ser expressas em termos de:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d\vec{z}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(0)$$

$$\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} = \overleftrightarrow{A}\,\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = (\overleftrightarrow{A})^2\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = (\overleftrightarrow{A})^2\vec{z}(0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^k\vec{z}(t)}{dt^k} = \overleftrightarrow{A}\,\frac{d^{k-1}\vec{z}(t)}{dt^{k-1}} = (\overleftrightarrow{A})^k\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d^k\vec{z}(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = (\overleftrightarrow{A})^k\vec{z}(0)$$

Matriz exponencial

Assim, a solução torna-se:

$$\vec{z}(t) = \left[1 + \overleftrightarrow{A}\frac{t}{1!} + (\overleftrightarrow{A})^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \overleftrightarrow{A}^k\frac{t^k}{k!}\right]\vec{z}(0) \;\; para\; k \to \infty$$

Elegantemente, faz-se,

$$e^{\overleftrightarrow{A}t} = 1 + \overleftrightarrow{A}\frac{t}{1!} + (\overleftrightarrow{A})^2\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

resultando em

$$\vec{z}(t) = e^{\overleftrightarrow{A}t}\vec{z}(0)$$

Preliminares para o cálculo da matriz exponencial

Teorema de Cayley-Hamilton: Seja B_{nxn} uma matriz quadrada. Então, B_{nxn} satisfaz seu próprio polinômio característico.

Preliminares para o cálculo da matriz exponencial

Se

$$\Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + a_2\Lambda^2 + a_1\Lambda + a_0 = 0$$

é polinômio característico de B_{nxn}, então:

$$(\overleftrightarrow{B})^n + a_{n-1}(\overleftrightarrow{B})^{n-1} + \cdots + a_2(\overleftrightarrow{B})^2 + a_1\overleftrightarrow{B} + a_0\overleftrightarrow{I} = 0$$

Preliminares para o cálculo da matriz exponencial

A partir disso, pode-se mostrar que se *f* e *g* são dois polinômios arbitrários dos autovalores Λ_j e se

$$f(\Lambda_j) = g(\Lambda_j)$$

$$\frac{d^l f(\Lambda)}{d\Lambda^l} = \frac{d^l g(\Lambda)}{d\Lambda^l} \; em \; \Lambda_j.$$

,para $j = 1, \ldots, n$ e $l = 1, \ldots, n\text{-}1$; então,

$$f(\overleftrightarrow{B}) = g(\overleftrightarrow{B})$$

Preliminares para o cálculo da matriz exponencial

Ou seja, para dois polinômios quaisquer, que dão valores iguais no espectro de B_{nxn}, e que suas derivadas são iguais nesse conjunto de autovalores; então, esses dois polinômios dão valores iguais quando se calculam as funções matriciais que eles definem.

O que esse resultado possibilita?

A partir disso, é possível calcular qualquer função da matriz B_{nxn} em termos de um polinômio finito!

Sabe-se que, com os n autovalores de B_{nxn}, pode-se construir um polinômio de grau n - 1 que dá valores pré-especificados para cada autovalor Λ_j.

Cálculo da matriz exponencial

Sendo $f(\overleftrightarrow{B}) = e^{\overleftrightarrow{B}}$, f é calculada em termos de um polinômio finito, em vez duma série infinita. Assim:

$$e^{\overleftrightarrow{B}} = \gamma_{n-1}(\overleftrightarrow{B})^{n-1} + \cdots + \gamma_2(\overleftrightarrow{B})^2 + \gamma_1\overleftrightarrow{B} + \gamma_0\overleftrightarrow{I}$$

Os coeficientes Υ_j são determinados impondo-se:

$$g(\Lambda) = \gamma_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_2\Lambda^2 + \gamma_1\Lambda + \gamma_0$$

$$g(\Lambda) = f(\Lambda) = e^{\Lambda}$$

No caso de um sistema linear, homogêneo e autônomo,

$$\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{A}t$$

1.2 Diagonalização da matriz A_{nxn}

Facilitando nossa vida

Uma solução simples

Para o caso de A_{nxn} ser matriz diagonal, a solução do sistema

$$d\vec{z}(t)/dt = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

é, simplesmente,

$$z_j(t) = z_j(0)e^{\lambda_j t} \ (j = 1, 2, ..., n)$$

sendo λ_j os elementos da diagonal.

Diagonalizando

Se A_{nxn} não é diagonal, mas seus autovalores λ_j são distintos, então essa matriz é *diagonalizável*. Ou seja,

$$\exists \overleftrightarrow{P} \; tal \; que \; (\overleftrightarrow{P})^{-1} \overleftrightarrow{A} \, \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{D}$$

Sendo,

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Mas que é a matriz P_{nxn}?

Tal matriz tem suas colunas formadas pelos autovetores da matriz A_{nxn}.

Deslocando a solução sem perder o estilo

Assim, pode-se fazer a transformação de coordenadas $\vec{z} = \overleftrightarrow{P}\,\vec{v},$ de modo que os autovalores da matriz A_{nxn} sejam os elementos da matriz diagonal D_{nxn}, facilitando a análise de estabilidade. O sistema resultante é:

$$\overleftrightarrow{P}\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P}\,\vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{D}\,\vec{v}(t)$$

O novo pode voltar ao original

Assim, o sistema original se transforma em *n* eq. diferenciais *desacopladas*, de modo que a evolução de cada variável de estado independe da demais variáveis. A solução desacoplada é:

$$\vec{v}(t) = e^{\overleftrightarrow{D}t}\vec{v}(0)$$

A solução original é dada por:

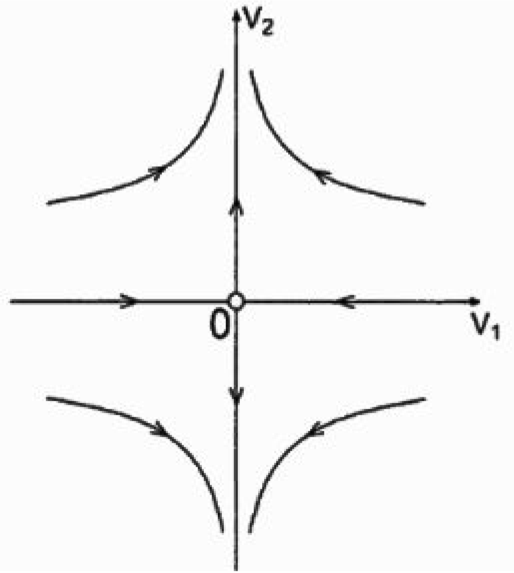
$$\vec{z}(t) = \overleftrightarrow{P} e^{\overleftrightarrow{D}t}(\overleftrightarrow{P})^{-1}\vec{z}(0)$$

Exemplo

Sistema *dx/dt = -x + 2y, dy/dt = 3y*

$$\frac{dv_1}{dt} = -v_1 \quad \rightarrow \quad v_1(t) = v_1(0)e^{-t}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = +3v_2 \quad \rightarrow \quad v_2(t) = v_2(0)e^{3t}$$



1.3 Forma canônica de Jordan

Forma geral da matriz diagonal

Quando nem tudo é flores

Nem todas as matrizes são diagonalizáveis. Há casos em que nem todos os autovetores da matriz A_{nxn} são L.I. Nessa situação,

- Se cada autovalor múltiplo admite um número de autovetores L.I. que é igual à sua multiplicidade, então a matriz A_{nxn} pode ser diagonalizada;
- caso contrário, pode-se transformar tal matriz numa matriz quasi-diagonal, chamada *forma canônica de Jordan.*

Exemplo

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = 1 \; e \; \lambda_3 = 2$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jordan em ação

Quando a matriz A_{nxn} não é diagonalizável, pode-se mostrar que:

$$\exists \overleftrightarrow{P} \; tal \; que \; (\overleftrightarrow{P})^{-1} \overleftrightarrow{A} \, \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{J}$$

Sendo que J_{nxn} está na forma canônica de Jordan:

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{J}_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{J}_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \overleftrightarrow{J}_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Jordan em ação

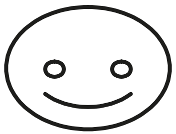
Os λ_j são autovalores da matriz A_{nxn}, não necessãriamente distintos, e $\overleftrightarrow{J}_k$ são matrizes de ordem *k* chamadas *blocos de Jordan*.

$$\overleftrightarrow{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

A ordem *k* expressa a multiplicidades do autovalores λ_k.

Considerações finais

Os autovetores da matriz A_{nxn}, quando L.I.s, formam uma base para o espaço definido por essa matriz. A partir dessa base, pode-se escrever tal matriz na forma diagonal. Quando nem todos os autovalores são distintos, *A* pode ser escrita numa forma quasi-diagonal, a forma de Jordan. A base, nesse caso, é constituída por *autovetores generalizados*.



Obrigado!

Alguma pergunta?

Referências

- Monteiro, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- http://paulbourke.net/fractals/lorenz/lorenz1.png
- http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/29_caos/imagens/pendulo-amortecido1.gif

Credits

Special thanks to all the people who made and released these awesome resources for free:

- Presentation template by SlidesCarnival
- Photographs by Unsplash