# Sistemas lineares autônomos de tempo contínuo

*Olá!*

# Eu sou Gêdhean Alves

Uma breve discussão das soluções analíticas para sistemas de uma e duas equações diferenciais

# 1.1 Caso unidimensional

*Simples mas não menos importante*

A solução e o ponto de equilíbrio são triviais

## Equação linear autônoma de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax + b$$

$$x^* = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a} && \text{se} \quad a \neq 0 \\ x(t) &= x(0) + bt && \text{se} \quad a = 0 \end{aligned}$$

## Uma mudança de variável conveniente

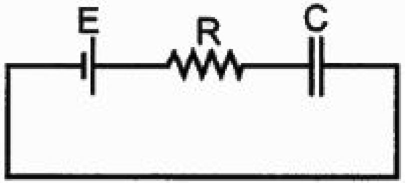
Escrevendo a equação diferencial em função da nova variável *y(t)*, desloca-se o ponto de equilíbrio para a origem:

$$y(t) \equiv x(t) - x^*$$

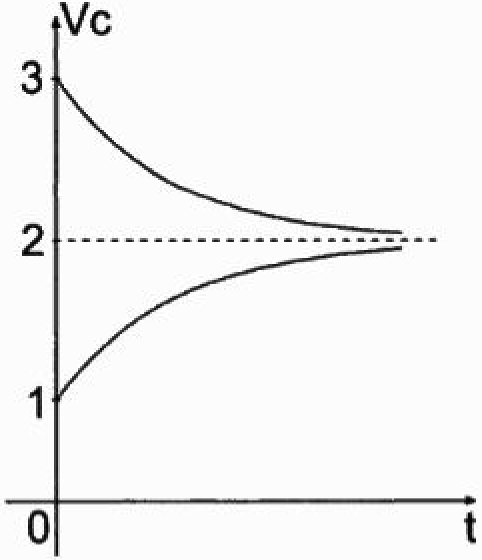
$$\frac{dy}{dt} = ay \quad \Longrightarrow \quad \int_{x(0)+(b/a)}^{x(t)+(b/a)} \frac{dy}{y} = a\int_0^t dt$$

# Um exemplo em circuitos eletrônicos

$$v_c(t) + v_r(t) - E = 0$$

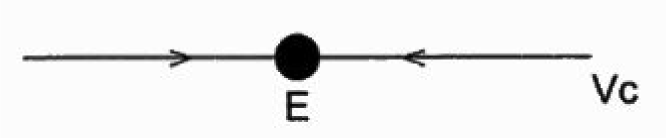



$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c + E}{RC}$$




**R = 1 , C = 1 e E = 2**

# O retrato de fases do circuito RC



# 1.2 Caso bidimensional

*Uma introdução para o caso n-dimensional*

# Forma geral e ponto de equilíbrio

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= ax_1(t) + bx_2(t) + \alpha \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= cx_1(t) + dx_2(t) + \beta\end{aligned}$$

$$x_1^* = \frac{b\beta - d\alpha}{ad - bc} \quad , \quad x_2^* = \frac{c\alpha - a\beta}{ad - bc}$$

## Simplificando as coisas

$$
\begin{aligned}
x(t) &\equiv x_1(t) - x_1^* \\
y(t) &\equiv x_2(t) - x_2^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + by(t) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= cx(t) + dy(t)
\end{aligned}
$$

$(x^*, y^*) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio do novo sistema.

# Simplificando as coisas na forma matricial

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = k_1\vec{z}_1 + k_2\vec{z}_2$$

Solução geral

Supondo *uma solução* com a seguinte forma:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Tal solução corresponde a uma reta no espaço de fases,

$$x(t) = \frac{x_0}{y_0} y(t)$$

## Solução geral

Substituindo essa solução na eq. diferencial, temos:

$$(a-\lambda)x_0 + by_0 = 0$$

$$cx_0 + (d-\lambda)y_0 = 0$$

Resolvendo o sistema acima, encontra-se a eq. característica da E.D.

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

## Solução geral

Para cada $\lambda_j$, encontra-se o par $(x_{0j}, y_{0j})$ correspondente.
Assim, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral é:

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$k_1$ e $k_2$ são constantes determinadas pelas condições iniciais.

## Autovalores e autovetores

Os números $\lambda_j$ e os respectivos vetores $z_{0j}$ são os autovalores e autovetores da matriz $A$, respectivamente.

$$\vec{z}_{01}(t) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix}, \qquad \vec{z}_{02}(t) = \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

Definição:

$$\overleftrightarrow{A}\,\vec{z}_0 = \lambda \vec{z}_0$$

O polinômio característico é obtido calculando

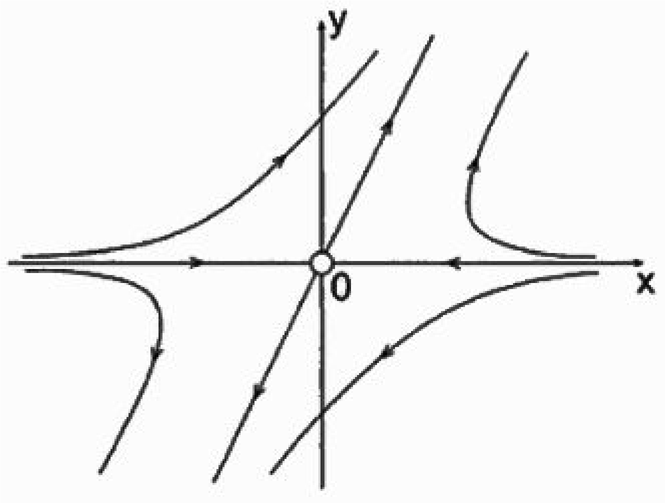
$$\det\left(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}\right) = 0$$

## Exemplo

Retrato de fases do sistema *dx/dt* = *-x +2y*, *dy/dt* = *3y*.

$$\vec{z}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

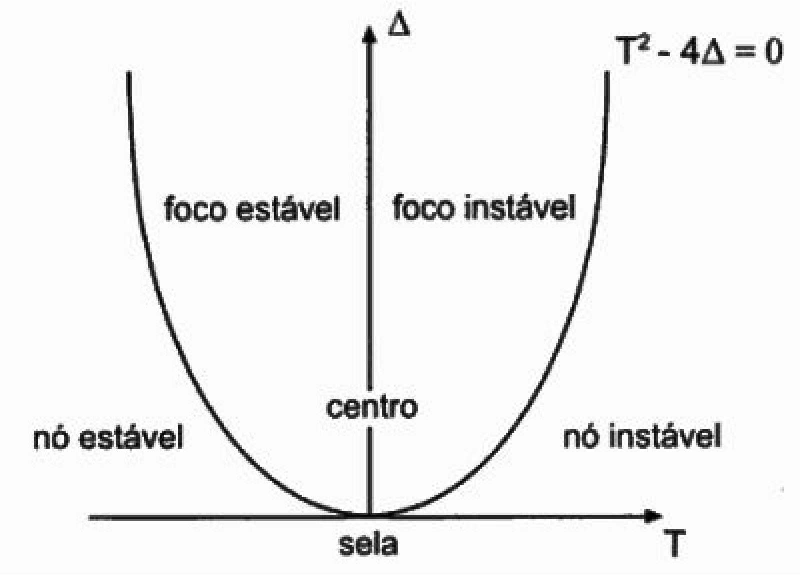
$$\vec{z}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$$



Classificação do equilíbrio quanto à topologia e à estabilidade

- Se $\triangle<0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais e com sinais opostos
  - Sela *instável* no sentido de Lyapunov.
- Se $\triangle>0$ e $T^2-4\triangle>0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais de sinais iguais
  - se $T>0$, *nó instável*
  - se $T<0$, *nó assintoticamente estável*
- Se $\triangle>0$ e $T^2-4\triangle<0$, então $\lambda_{1,2}$ são complexos conj.
  - se $T>0$, *foco instável*
  - se $T<0$, *foco assintoticamente estável*
  - se $T=0$, *centro neutramente estável*

# Classificação dos pontos de equilíbrio no espaço $\triangle$-$T$



## Casos degenerados

Pode acontecer que a matriz *A* possua autovalores iguais, gerando soluções L.D.

Para construir a solução geral nesse caso, deve-se encontrar o autovetor associado a λ:

$$\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

e, com ele, obter um vetor-coluna $w = (w_1, w_2)$ que obedeça a:

$$(a - \lambda)w_1 + bw_2 = x_0$$

$$cw_1 + (d - \lambda)w_2 = y_0$$

## Solução geral para os casos degenerados

Assim, a solução geral é dado por:

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + k_2 \begin{pmatrix} x_0 t + w_1 \\ y_0 t + w_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

- Nesse caso, quando $T^2 = 4\triangle$
  - se $T<0$, *nó impróprio assintoticamente estável*
  - se $T>0$, *nó impróprio instável*

Infinitos pontos de equilíbrio!

Há ainda o caso em que um dos autovalores é nulo e o outro, necessariamente é $T$. Nessa situação, a solução geral é dada por:

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix} e^{\lambda T}$$

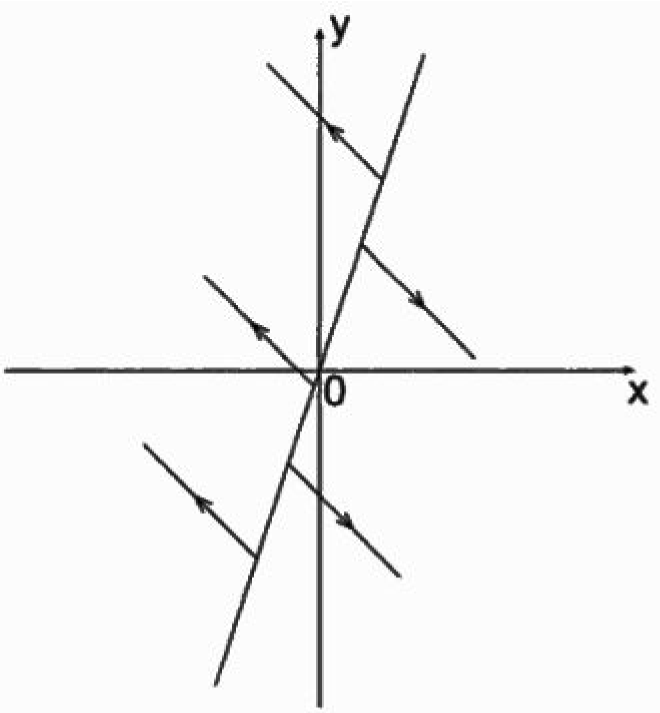
As trajetórias são retas paralelas a:

$$y(t) = \frac{y_{02}}{x_{02}} x(t)$$

Essas trajetórias se aproximam, quando $t \to \infty$, da reta:

$$y(t) = \frac{y_{01}}{x_{01}} x(t)$$

Exemplo degenerado




Sistema $dx/dt = 3x - y$, $dy/dt = -3x + y$.

*Obrigado!*

# Alguma pergunta?

## Referências


- Monteiro, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- http://paulbourke.net/fractals/lorenz/lorenz1.png
- http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/29_caos/imagens/pendulo-amortecido1.gif

## Credits

Special thanks to all the people who made and released these awesome resources for free:

- Presentation template by SlidesCarnival
- Photographs by Unsplash