Sistemas de tempo contínuo: introdução

Olá!

Eu sou Gêdhean Alves

Irei apresentar alguns conceitos básicos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos e falar sobre técnicas de análise de equações diferenciais

1. Sistemas lineares

Conceitos iniciais

Por que estudar sistemas lineares?

- Modelam vários fenômenos;
- Podemos linearizar os não-lineares;
- Apresentam “boa” precisão.

Como representar um sistema linear?

$$a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t)$$

Alguns conceitos sobre sistemas lineares

- Homogeneidade
  - $F(t) = 0$
- Não-homogêneo
  - $F(t) \neq 0$

Alguns conceitos sobre sistemas lineares

- Problema de valor inicial
  - Começamos em t_0
  - *n* constantes são necessárias
    - $x(t_0)$ *e as* $n-1$ *primeiras derivadas de* $x(t)$
- Problema de condição de contorno
  - Constantes diferentes para instantes diferentes

Alguns conceitos sobre sistemas lineares

- Solução geral
  - Contém todas as soluções possíveis
  - n constantes são necessárias
  - $S_{geral} = S_{homogênea} + S_{particular}$
- Solução como combinação linear

2. Técnicas de análise

Uma alternativa à solução exata

Uma outra maneira de representar um sistema linear

Fazendo $x(t) = x_1(t)$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= x_n(t) \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= \frac{F(t)}{a_n(t)} - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1(t) - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2(t) - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n(t)
\end{aligned}
$$

Qual a vantagem de representar um sistema linear assim?

- Notação simples

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{E}(t)$$

- Computacionalmente melhor de se tratar

Três técnicas de análise

- **Técnica analítica**
  - Integram-se analiticamente as equações, determinado a solução em fórmulas gerais.

Técnica analítica

Vantagens

Solução válida para quaisquer condições iniciais e valores de parâmetro escolhidos. Novas escolhas não obrigam nova integração.

Desvantagens

Quase nunca integração analítica é factível.

Três técnicas de análise

- **Técnica numérica**
  - Integram-se numericamente as equações, calculando-se valores ***aproximados*** para as variáveis dependentes $x_j(t)$ em pontos pré-selecionados da variável independente t.

Técnica numérica

Vantagem

Quase todo o trabalho é feito pelo computador.

Desvantagens

A solução é aproximada. Válida só para as condições iniciais e parâmetros da situação. Novos valores necessitam novas integrações.

Três técnicas de análise

- **Técnica qualitativa**
  - Analisa a evolução do sistema por meio de cálculos analíticos relativamente simples. Os resultados são representados em *espaço de estados*.

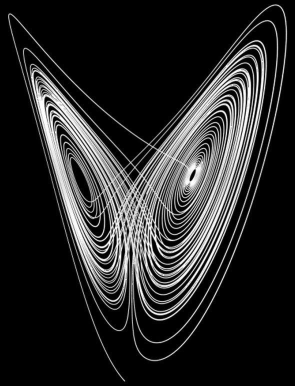
Técnica qualitativa

Vantagens

Cálculos analíticos, em geral, mais simples. Possibilita determinar as soluções assintóticas e a estabilidade delas.

Desvantagens

Perde-se informação *quantitativa* do sistema. Pouco se sabe sobre o comportamento transiente.



Espaço de estados

É um espaço n-dimensional, cujos eixos coordenados são o eixo-x_1, eixo-x_2, …, eixo-x_n.

O que é um estado?

Um estado é representado como um ponto com coordenadas *$x_1(t)$, $x_2(t)$, …., $x_n(t)$*. A evolução temporal desse ponto é dada por:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Alguns conceitos sobre espaço de estados

As variáveis dependentes $x_j(t)$ são chamadas de *variáveis de estado*.

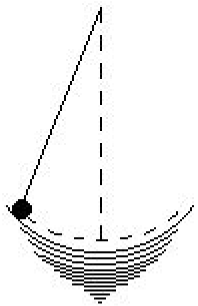
Alguns conceitos sobre espaço de estados

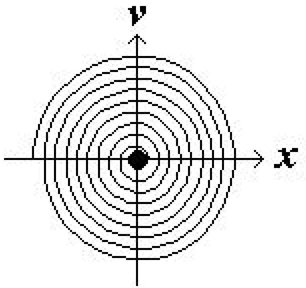
As funções f_j definem o *campo velocidade* do sistema.

Alguns conceitos sobre espaço de estados

Um *retrato de fases* é o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais válidas para as funções f_j.

Exemplo de um espaço de estados bidimensional





Uma solução no espaço!

Uma solução $\vec{x}(t)$ é um caminho ou fluxo no espaço de fases percorrido com velocidade $d\vec{x}(t)/dt$.

3. Sistemas autônomos e não-autônomos

Dependência direta e indireta do tempo

Definição de sistema autônomo

Conj. de E.D. a parâmetros constantes e com função de entrada que não depende ***explicitamente*** do tempo t.

Por que modelar sistemas autônomos?

- Muitos sistemas evoluem da mesma maneira, qualquer que seja o instante inicial.
- Uma variedade de sistemas podem ser bem descritos pela evolução de certas quantidades médias.

Sistema não-autônomo

Quando o tempo aparece explicitamente em algum parâmetro e/ou na função de entrada.

Sistema não-autônomo na forma autônoma

Basta definir $x_{n+1}(t) = t$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\
\frac{dx_{n+1}}{dt} &= 1
\end{aligned}
$$

4. Sistemas conservativos e dissipativos

Analisando um “volume” de condições iniciais

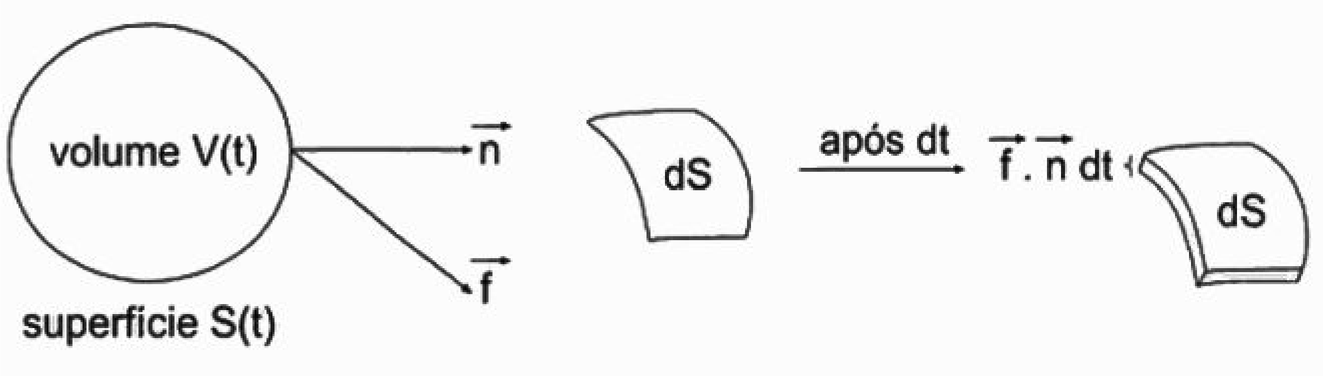
As condições iniciais

Considerando a equação

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

Seja *S(t)* uma superfície fechada com volume *V(t)* no espaço de fases. Os pontos em *S* e no seu interior são as condições iniciais das trajetórias. Analisa-se esse volume para uma evolução de tempo infinitesimal *dt*.

O “volume”



$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (\vec{n}.\vec{f}dt)\,dS$$

$$\frac{V(t+dt)-V(t)}{dt} \equiv \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{n}.\vec{f}\,dS = \int_V \vec{\nabla}.\vec{f}\,dV$$

O “volume” de condições iniciais

Analisando o *divergente* do campo vetorial $\vec{f}$, pode-se afirmar que o sistema é:

- Conservativo
  - $dV/dt = 0$
- Dissipativo
  - $dV/dt < 0$
- Expansivo
  - $dV/dt > 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

O Caos

“Comportamento caótico só pode ocorrer em sistemas dinâmicos dissipativos, não-lineares.”

5. Noções de estabilidade

Analisando a estabilidade de uma solução estacionária

Pontos de equilíbrio no sentido de Lyapunov

Pontos de equilíbrio representam *soluções estacionárias*. O sistema para de se mover no espaço de fases quando $\vec{x} = \vec{x}^*$. Assim, $d\vec{x}/dt = 0$ nesse ponto.

Ponto de equilíbrio *assintoticamente estável*

Para uma perturbação na condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$, então a trajetória $\vec{x}(t) \to \vec{x}^*$ quando $t \to \infty$.

Esse ponto atrai todas a trajetórias que passam por uma "esfera" centrada nele.

Ponto de equilíbrio *assintoticamente estável*

O equilíbrio pode ser *global* ou *local*. Em ambos os casos, o ponto é classificado como *atrator*.

O conj. de todas as condições iniciais que convergem para esse atrator forma a *bacia de atração* desse ponto.

Ponto de equilíbrio *neutramente estável*

Para uma perturbação na condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$, então a trajetória permanece dentro de uma esfera centrada em x^*, porém, $\vec{x}(t)$ não tende para $\vec{x}^*$ quando $t \to \infty$.

Ponto *instável*

Após uma perturbação na condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$, então a trajetória deixa a esfera centrada em $\vec{x}^*$ num tempo finito.

Estabilidade no sentido de Lagrange

A solução dum sistema não-autônomo apresenta *estabilidade limitada* se $\vec{x}(t)$ é uma função limitada.

Estabilidade bibo

Considere o sistema não-autônomo com forçamento $\vec{E}(t)$ dependente do tempo a seguir:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{E}(t)$$

Sua solução apresenta *estabilidade bibo* se, $\vec{x}^*$ é ponto de equilíbrio do sistema não-forçado e, para $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$, então $\vec{E}(t)$ limitada produz uma saída limitada.

6. Existência e unicidade

Analisando uma solução sem conhecê-la

A solução existe e é única!

Para um sistema $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x}, t)$, temos:

- Se as funções f_j são contínuas no seu domínio, então **existe** solução para o sistema.
- Se as derivadas parciais $\partial f_j/\partial x_i$ são contínuas nesse domínio, então essa solução é **única**.

Consequência

Considere um sistema que segue as condições citadas. Suponha que há duas soluções para esse sistema. Se para algum instante t essas soluções são iguais, então elas devem ser iguais para todo instante t.

Equações de primeira ordem separáveis

O sistema *dx/dt = f(x,t)* é *separável* quando *f(x,t)* pode ser escrita como produto de duas funções: uma apenas em função de *x* e outra apenas em função de *t*.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) = g(x)h(t) \implies \frac{dx}{g(x)} = h(t)dt$$

Para *h(t)* = 1, a função é autônoma; c.c., não-autônoma. Para eq. autônoma:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Diz-se que a eq. é *integrável* quanto é possível resolver analiticamente as integrais acima.

Obrigado!

Alguma pergunta?

Referências

- Monteiro, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- http://paulbourke.net/fractals/lorenz/lorenz1.png
- http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/29_caos/imagens/pendulo-amortecido1.gif

Credits

Special thanks to all the people who made and released these awesome resources for free:

- Presentation template by SlidesCarnival
- Photographs by Unsplash